

Неперервність функцій

Неперервність функції в точці. Властивості функцій, неперервних в точці та на відрізку. Розриви та їх класифікація.

Основні теоретичні відомості

1. Неperервність функції у точці. Точки розриву

Розглянемо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображені на рис 1.

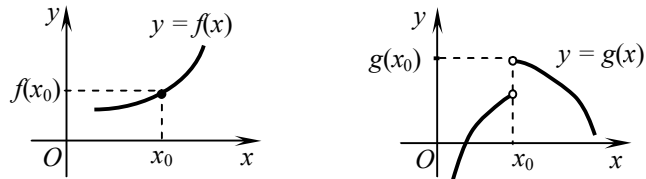


Рис.1

З рисунка 1 видно, що графіком функції $f(x)$ є суцільна крива, яку можна провести, не відриваючи олівець від паперу. Графік функції $g(x)$ не є суцільною кривою, у точці x_0 графік робить “стрибок”. Кажуть, що функція $f(x)$ в т. x_0 неперервна, а $g(x)$ в т. x_0 розривна.

Дамо строге означення неперервності функції у точці.

Функцію $f(x)$ називають *неперервною в т. x_0* , якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції

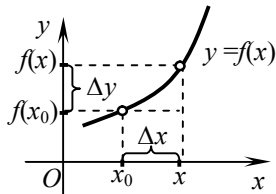


Рис. 2.

На рисунку 2: $\Delta x = x - x_0$ – приріст аргументу, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приріст функції.

Перетворимо рівність :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$$

Отже, при знаходженні границі *неперервної* функції можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функцію $f(x)$ замість аргументу x підставити значення

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x.$$

Сформулюємо ще одне означення неперервності, рівносильне попередньому.

Функцію $f(x)$ називають *неперервною* в точці x_0 , якщо виконуються умови:

- 1) вона визначена в цій точці і деякому її околі;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

2. Основні властивості неперервних в точці функцій

1⁰. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в т. x_0 , то в цій точці неперервні функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови $g(x) \neq 0$).

2⁰. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в т. x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в т. $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в т. x_0 .

3⁰. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (a, b) , то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Функція неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на (a, b) і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b .

Сформулюємо теореми про неперервні функції.

Теорема 1 (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 2 (друга теорема Больцано-Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a) \neq f(b)$. Тоді для довільного числа $\mu \in [f(a); f(b)]$ знайдеться таке число $c \in (a; b)$, що $f(c) = \mu$.

Теорема 3 (Вейерштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше.

4. Розриви функцій та їх класифікація

Якщо хоча б одна з умов неперервності функції в точці не виконується, то функція *розривна* в точці x_0 , а саму точку x_0 називають *точкою розриву функції*.

Класифікація точок розриву проводиться таким чином:

1) якщо існують лівостороння і правостороння границі функції в точці x_0 , тобто $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$, де a і b – скінченні числа, причому $a \neq b$

(рис. 3), то точку x_0 називають *точкою розриву першого роду*; відмітимо, що в точці x_0 сама функція може бути як визначена так і невизначена;

2) якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то точку x_0 називають *точкою розриву другого роду*, в точці x_0 функція робить “нескінченний стрибок”(рис.4);

3) якщо $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$, $a \neq \infty$, $f(x_0) \neq a$ або в цій точці функція невизначена, то точку x_0 називають *усувною точкою розриву* (рис.5).

У першому випадку, кажуть, що функція робить “скінченний стрибок”, а у другому випадку – “нескінченний стрибок”.

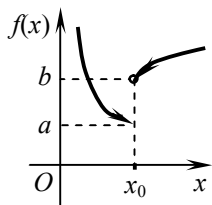


Рис.3

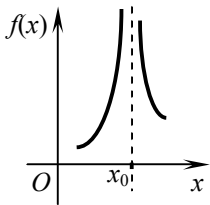


Рис.4

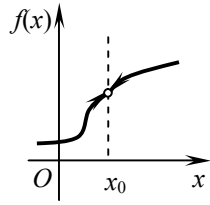


Рис.5

Приклади розв'язання типових задач

1. Дослідіть на неперервність функцію $y = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Функція не визначена при $x = 0$, але має в цій точці границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Отже, } x = 0 \text{ – точка усувного розриву}$$

(рис. 6). В усіх інших точках дана функція неперервна.

Якщо довизначити функцію у точці $x=0$, поклавши $y(0)=1$, то дістанемо неперервну функцію

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

2. Дослідіть на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що в точці $x = 0$ функція не має сенсу.

Знайдемо границі

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з класифікацією точок розриву робимо висновок, що $x = 0$ – точка розриву першого роду.

3. Дослідіть на неперервність функцію $y = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $x_3 = 2$.

Розв'язання. В точці $x_1 = 0$ функція визначена: $y(0) = -\frac{1}{2}$, значить, вона неперервна як елементарна функція.

Перевіримо точку $x_2 = 1$. В цьому випадку знаменник функції обертається в нуль, значить, $x_2 = 1$ – точка розриву.

Знайдемо односторонні границі.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$$

Отже, $x = 2$ – точка розриву другого роду (рис. 7), $x = 1$ – точка усувного розриву.

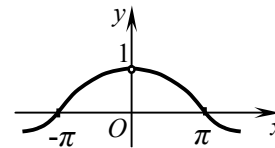


Рис. 6

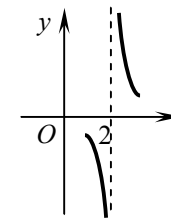


Рис. 7

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Дослідіть на неперервність функції. В точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

$$1. f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8} \quad 2. f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1 + 4^{\frac{x}{x+2}}} \quad 3. f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}} \\ 4. f(x) = \frac{x}{\sin x} \quad 5. f(x) = \arctg \frac{x}{x-6} \quad 6. f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

Відповіді. 1. $x=2$ — точка усувного розриву; $x=4$ — точка розриву другого роду. 2. $x=-2$ — точка розриву першого роду; $x=1$ — точка розриву другого роду. 3. $x=2$ — точка розриву першого роду. 4. $x=0$ — точка усувного розриву; $x=\pi k$ — точки розриву другого роду. 5. $x=6$ — точка розриву першого роду. 6. $x=0$; 1— точки розриву другого роду.

Індивідуальні тестові завдання

Дослідіть функцію $f(x)$ на неперервність. В точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

$$16.1. a) f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}; \quad б) f(x) = \frac{3}{2 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$$

$$16.2. a) f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}; \quad б) f(x) = \arctg \frac{x-1}{x+1}$$

$$16.3. a) f(x) = \frac{5x^2 - x - 4}{x^2 + 2x - 3}; \quad б) f(x) = 7^{\frac{2}{x+3}}$$

$$16.4. a) f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 4x - 5}; \quad б) f(x) = \frac{5}{\lg|x+1|}$$

$$16.5. a) f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 + x - 3}; \quad б) f(x) = \frac{\frac{1}{5^{x-1}} - 1}{\frac{1}{5^{x-1}} + 1}$$

$$16.6. a) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5x - 7}; \quad б) f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$16.7. a) f(x) = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 + 5x - 6}; \quad б) f(x) = \frac{6}{3 + 2^{\frac{1}{x+4}}}$$

$$16.8. a) f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 + 3x - 4}; \quad б) f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$16.9. a) f(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 3x - 5}; \quad б) f(x) = (x+1) \arctg \frac{1}{x}$$

$$16.10. a) f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 2}; \quad б) f(x) = \frac{1}{3^{x+2} + 3^{\frac{1}{x-2}}}$$

$$16.11. a) f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 4}{x^2 - 4x + 3}; \quad б) f(x) = 2^{\frac{3}{x-7}}$$

$$16.12. a) f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 3}{x^2 - 5x + 4}; \quad б) f(x) = \frac{6}{6 + 6^{\frac{1}{x-6}}}$$

$$16.13. a) f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 6x + 5}; \quad б) f(x) = \frac{1}{4^{\frac{1}{x+1}} + 4^{\frac{1}{x-1}}}$$

$$16.14. a) f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 7}{x^2 - 7x + 6}; \quad б) f(x) = 2^{\frac{x}{x^2-9}}$$

$$16.15. a) f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4}; \quad б) f(x) = (2x+3) \arctg \frac{2}{x}$$

$$16.16. a) f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 2}; \quad б) f(x) = \frac{x}{\lg(1+x)}$$

$$16.17. a) f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 3x - 4}; \quad б) f(x) = \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x-5}}}$$

$$16.18. a) f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 4x - 5}; \quad б) f(x) = 3^{\frac{x}{x^2-4}}$$

$$16.19. a) f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 7}{x^2 - 2x - 3}; \quad б) f(x) = (x+4) \arctg \frac{1}{x}$$

$$16.20. a) f(x) = \frac{4x^2 - x - 5}{x^2 - 4x - 5}; \quad б) f(x) = 5^{\frac{x-2}{x-1}}$$